CEBİR II ARA SINAV SORULARI

1. $\mathbb{Z}\,[i\sqrt{2}]$ kümesi toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Tamlık bölgesi olup olmadığını araştırınız.

2. a) R sıfırdan farklı, $\forall\, a \in R$ için a=aba olacak şekilde bir tek $b \in R$ olan sıfır bölensiz bir halka olsun. Bu durumda R'nin birimli olduğunu gösteriniz.

   b) $H = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 7 \nmid b\}$ olsun. H'nin $\mathbb{Q}$'nun alt halkası olduğunu gösteriniz.

3. a) $\mathbb{Z}$'den katsayılı 2×2 tipindeki matrisler halkası $mat_2(\mathbb{Z})$ olsun.

   $A = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \equiv 0 \pmod 5\}$ kümesi $mat_2(\mathbb{Z})$ halkasının bir ideali midir?

   b) H bir halka ve $\forall\, x \in H$ için $x^2 = x$ olsun. Bu durumda $x = -x$ olduğunu gösteriniz.

4. a) $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olsun. $\mathbb{Z}/I$ bölüm halkasında idempotent eleman olup $\mathbb{Z}$'de idempotent olmayan bir halka örneği veriniz.

   b) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$

   $\overline{a} \to f(\overline{a}) = 5\overline{a}$ ile tanımlı f dönüşümünün bir halka homomorfizması olduğunu gösteriniz. Ayrıca Çekf ve $f(\mathbb{Z}_6)$ kümelerini bulunuz.

5. a) $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ bölüm halkasının sıfır bölen, tersinir, idempotent ve nilpotent elemanlarını bulunuz.

   b) $\mathbb{Z}$ve $\mathbb{Z}_{36}$ halkaları veriliyor. $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}_{36}$'ya örten halka homomorfizması tanımlayıp çekirdeğini bulunuz ve $\mathbb{Z}$'nin çekirdeği kapsayan idealleriyle $\mathbb{Z}_{36}$ halkasının idealleri arasında birebir eşleme kurunuz.

BAŞARILAR DİLERİM

Cevap Anahtarı

1 - $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a+bi\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$

$e = 1+0i\sqrt{2}$, $\forall a+bi\sqrt{2}, c+di\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ için

$(a+bi\sqrt{2})(c+di\sqrt{2}) = (ac-2bd)+(ad+bc)i\sqrt{2}$
$= (ca-2db)+(da+cb)i\sqrt{2} = (c+di\sqrt{2})(a+ib\sqrt{2})$

olup değişmelidir.

$a+bi\sqrt{2}, c+id\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ için

$(a+bi\sqrt{2})(c+di\sqrt{2}) = (ac-2bd)+(ad+bc)i\sqrt{2} = 0$ olsun

$-d /\ ac-2bd=0 \qquad -acd+2bd^2=0$
$c /\ ad+bc=0 \qquad acd+bc^2=0$ $\Big\}$ $b(c^2+2d^2)=0$

olup $\mathbb{Z}$ T.B olduğundan ya $b=0 \vee c^2+2d^2=0$

olur $c^2+2d^2=0 \Rightarrow c=d=0$ olup biter $b=0$ olsun.

$c /\ ac-2bd=0 \qquad ac^2-2bcd=0$
$2d /\ ad+bc=0 \qquad 2ad^2+2bcd=0$ $\Big\}$ $a(c^2+2d^2)=0$

olup $c^2+2d^2 \neq 0 \Rightarrow a=0$ olup sıfır bölensizdir.

2 - a) $a=aba \Rightarrow e=ba$ diyelim. $e=0_R$ ise

$a=aba=0_R$ olup $a=0_R$ olur $e \neq 0_R$ olsun.

$e^2=(ba)(ba)=b(aba)=ba=e$ olup e idempotent

$c \in R$ olalım. $(ce-c)e = ce^2-ce = ce-ce = 0_R$

$ce-c=0_R \quad ce=c$ benzer işlemler $e(ec-c)=0_R$

içinde yapılırsa e R'nın birimi bulunur.

b) $H \neq \emptyset$ aşikar $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in H \Rightarrow 7 \nmid b \wedge 7 \nmid d$ dir

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{b.d}$ $\quad 7 \nmid bd$ olup $\frac{ad-bc}{bd} \in H$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in H$ olup H alt halkadır.

3 a) $A \neq \emptyset$ açık

$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in A$ için $a \equiv b \equiv e \equiv f \equiv 0 \pmod 5$ dir.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix} \in A \text{ olur.}$$

$\forall \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ ve $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$ için

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+tc & zb+td \end{bmatrix} \notin A \text{ sol ideal}$$

değil

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix} \in A \text{ olup}$$

sağ ideal o halde ideali değildir.

b) $\forall x \in H$ için $x^2 = x$ olsun

$$x+x = (x+x)(x+x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$$

$$x+x = x+x+x+x$$

$$0_R = x+x \Rightarrow x = -x \text{ bulunur.}$$

4- a) $\mathbb{Z}$ nin $I = 6\mathbb{Z}$ idealini alalım

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ de $3+6\mathbb{Z}$ elemanı $(3+6\mathbb{Z})^2 = 3+6\mathbb{Z}$

olup idempotent fakat 3, $\mathbb{Z}$'de idempotent

değildir.

4-b $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$

$\bar{a} \to f(\bar{a}) = 5\bar{a}$ dönüşümünün önce iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow 6 | a-b \Rightarrow a = b + 6k \Rightarrow 5a = 5b + 30k$

$\Rightarrow 5\bar{a} = 5\bar{b}$ olup iyi tanımlıdır.

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ için $f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\overline{a+b}) = 5\,\overline{a+b}$

$= \overline{5(a+b)}$

$= \overline{5a + 5b}$

$= 5\bar{a} + 5\bar{b}$

$f(\bar{a} \cdot \bar{b}) = f(\overline{ab}) = 5\,\overline{ab} = 25\,\overline{ab} = 5\bar{a} \cdot 5\bar{b}$

Çek $f = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ $\quad f(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

5-a) sıfır bölen elemanlar $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}\}$

Tersinir elemanlar $= \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}\}$

idempotent " $= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{9}, \overline{16}\}$

nilpotent " $= \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}, \overline{18}\}$

b-) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{36}$

$a \to f(a) = \bar{a}$ örten halka homomorfizmasıdır. Çek $f = 36\mathbb{Z}$ olup

$\mathbb{Z}$ nin Çek f ($12\mathbb{Z}$) kapsayan idealleri

$36\mathbb{Z}, 18\mathbb{Z}, 9\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ karşılık

idealler ise $\langle \bar{0} \rangle, \langle \overline{18} \rangle, \langle \bar{9} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{2} \rangle, \mathbb{Z}_{36}$ ($\langle \overline{12} \rangle$)

bulunur.